ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 23, Nos. 3-4, 1976

UN THÉORÈME GÉNÉRAL DE GÉNÉRATION DE SEMI-GROUPES NON LINÉAIRES

PAR
MICHEL PIERRE

ABSTRACT

In this paper, we provide a weak sufficient condition for the existence of solutions to the equation $(du/dt)+Au \ni 0$, $u(0)=x_0$, where A is an accretive (possibly nonlinear) operator; a weak criterion for m-accretiveness is also given.

Introduction

Cette note présente une condition suffisante faible pour l'existence locale et globale d'une solution pour les équations du type $(du/dt)+Au \ni 0$, $u(0)=x_0$, où A est un opérateur accrétif (éventuellement non linéaire) d'un espace de Banach quelconque. Ce résultat a l'intérêt de généraliser les théorèmes apparamment distincts de Kobayashi-Kobayasi [6] et Kobayashi [5] (et aussi Takahashi [8]), mais il recouvre aussi d'autres situations, par exemple celle que nous donnons en application. Un critère faible de m-accrétivité est également donné.

Je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur Ph. Bénilan qui a suscité mon intérêt pour ces problèmes et dont les suggestions ont été décisives pour la réalisation de ce travail.

Je remercie aussi très vivement le Professeur M. G. Crandall qui m'a aimablement fait ses remarques sur la version originale de ce papier.

Préliminaires

X désigne un espace de Banach quelconque de norme $|\cdot|$. Nous notons:

$$\tau(u,v)=\lim_{t\to 0^+}\frac{|u+tv|-|u|}{t}.$$

Received July 16, 1975

A est un opérateur non linéaire (éventuellement multivoque) de X, de domaine et d'image notés respectivement $D(A)$ et $R(A)$.

A est dit accrétif, si pour tout $\delta > 0$, $[x, y] \in A$, $[\hat{x}, \hat{y}] \in A$:

$$|x - \hat{x}| \leqq |x - \hat{x} + \delta(y - \hat{y})|.$$

Nous notons:

$$\tilde{D}(A) = \{x \in X ; \exists [x_n, y_n] \in A,\ x_n \to x,\ y_n \text{ borné}\}.$$

Nous définissons la fonction $|A \cdot|_i$ par:

$$\forall x \in \tilde{D}(A), \quad |Ax|_i = \inf \left\{ \sup_{n \in N} |y_n| ; \quad [x_n, y_n] \in A,\ x_n \to x \right\},$$

$$\forall x \notin \tilde{D}(A), \quad |Ax|_i = +\infty.$$

Les propriétés suivantes sont immédiates (cf. [6]):

a) L'application $x \to |Ax|_i$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.)

b) $D(A) \subset \tilde{D}(A) \subset \overline{D(A)}$

c) $\forall x \in D(A), \quad |Ax|_i \leqq |Ax|$.

Nous notons $|E| = \inf_{x \in E} |x|$ pour toute partie non vide E de X et $d(x, E) = |E - x|$.

DEFINITION 1. Nous appelons solution ε-approchée du problème $(du/dt) + Au \ni 0$, $u(0) = x_0$, sur $[0, T]$, toute application u de $[0, T]$ dans X telle qu'il existe une partition:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < T \leqq t_n,$$

et des éléments $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$, de X avec:

$$u(0) = x_0; \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \forall t \in]t_{i-1}, t_i], u(t) = x_i;$$

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Ax_i \ni y_i, \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\};$$

$$\max_i (t_i - t_{i-1}) \leqq \varepsilon, \ \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) |y_i| \leqq T\varepsilon.$$

DEFINITION 2. Nous rappelons qu'une bonne solution sur un intervalle $\mathcal{T}$ de $\boldsymbol{R}$ du problème $(du/dt) + Au \ni f$, $u(0) = x_0$, avec $f \in L^1(\mathcal{T}; X)$ et $x_0 \in \overline{D(A)}$, est une fonction continue de $\mathcal{T}$ dans $\overline{D(A)}$ vérifiant essentiellement:

$$\forall s, t \in \mathcal{T},\ s \leqq t,\ |u(t) - v(t)| \leqq |u(s) - v(s)| + \int_s^t \tau(u(r) - v(r), f(r) - g(r)) dr$$

pour tout couple de fonctions $(v, g) \in \mathscr{C}(\mathscr{T}; X) x L^1(\mathscr{T}; X)$ vérifiant:

$$\forall s, t \in \mathscr{T}, s \leqq t, \forall [x, y] \in A, |u(t) - x| \leqq |u(s) - x| + \int_s^t \tau(u(r) - x, g(r) - y) dr.$$

Pour la définition exacte de bonne solution, cf. Benilan [1] et [2].

DEFINITION 3. Nous dirons que A est un pseudo-générateur, s'il est accrétif et si pour tout x_0 dans $\overline{D(A)}$, il existe une bonne solution sur $[0, +\infty[$ du problème $(du/dt) + Au \ni 0$, $u(0) = x_0$.

DEFINITION 4. 1) Un triplet (ϕ, a, b) de fonctions de X dans $[0, +\infty]$ est dit avoir la propriété (C) si:

i) $\phi : X \to [0, +\infty]$ est semi-continue inférieurement (de domaine noté $D(\phi)$)

ii) $a, b : D(\phi) \to [0, +\infty[$ sont "localement bornées sur les bornés de ϕ", c'est-à-dire telles que:

$$(\forall K > 0, \forall x \in D(\phi), \exists r > 0, \exists a_0 > 0, \exists b_0 > 0),$$

$$(\phi(y) \leqq K, |y - x| \leqq r) \Rightarrow (a(y) \leqq a_0,\ b(y) \leqq b_0).$$

2) Etant donné (ϕ, a, b) vérifiant (C), nous dirons que l'opérateur A vérifie la propriété $R(\phi, a, b)$ si pour tout x de $D(\phi) \cap \overline{D(A)}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0, \varepsilon]$ et $[x_\delta, y_\delta] \in A$ tels que:

α) $|x - x_\delta - \delta y_\delta| \leqq \delta\varepsilon$

β) $\phi(x_\delta) \leqq e^{b(x)\delta}(\phi(x) + \delta a(x))$.

THEOREME I. *Soit un triplet (ϕ, a, b) vérifiant la condition (C) et A un opérateur accrétif vérifiant la condition $R(\phi, a, b)$.*

Alors, pour tout x_0 dans $D(\phi) \cap \tilde{D}(A)$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution ε-approchée sur $[0, T]$ du problème:

$$\text{(P)} \qquad \frac{du}{dt} + Au \ni 0, \qquad u(0) = x_0.$$

De plus, si a et b sont constantes, la propriété est vraie pour tout x_0 de $D(\phi) \cap \overline{D(A)}$ et tout $T > 0$.

THEOREME II. *Soit A un opérateur accrétif. On suppose qu'il existe un triplet (ϕ, a, b) vérifiant la condition (C) avec $D(\phi) \supset \tilde{D}(A)$, et tel que A vérifie la condition $R(\phi, a, b)$.*

Alors, A est un pseudo-générateur.

Comme corollaires, nous retrouvons les résultats de Kobayashi et Kobayasi.

COROLLAIRE 1. (Cf. Kobayashi [5].) *Soit A accrétif tel que*:

$$\forall x \in \overline{D(A)}, \qquad \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} d(x, R(I + \delta A)) = 0.$$

Alors, A est un pseudo-générateur.

COROLLAIRE 2. (Généralisation d'un théorème de Kobayashi-Kobayasi [6].) *Soit A accrétif. Supposons que la fonction f qui à $x \in \tilde{D}(A)$ associe* $\liminf_{\delta \downarrow 0}$ $(1/\delta^2)d(x, R(I + \delta A))$ *est localement bornée sur les bornés de* $|A \cdot|_i$.

Alors, A est un pseudo-générateur.

En effet, sous les hypothèses du Corollaire 1, A a la propriété $R(0,0,0)$. Sous les hypothèses du Corollaire 2, utilisant l'accrétivité de A, on démontre aisément que A a la propriété $R(|A \cdot|_i, 2(f+1), 0)$. (Cf. par exemple [6].)

REMARQUES.

1°) Pour la plus grande part des résultats en particulier le Théorème I, il suffit de supposer que A est quasi-accrétif au sens de Takahashi [8].

2°) Le Théorème II généralise aussi le résultat de Takahashi [8], pour les fonctions $L(\cdot, \cdot)$ du type:

$$\forall \sigma, \tau \in [0, +\infty[x[0, +\infty[, \quad L(\sigma, \tau) = e^{a\sigma}(\tau + b\sigma), \quad a, b \in R^+.$$

Remarquons que nous pourrions remplacer l'inégalité β) de la condition $R(\phi, a, b)$ par une condition plus générale utilisant une fonction L vérifiant des conditions du type (L_1), (L_2) de [8].

3°) Les exemples qui suivent prouvent, d'une part, qu'il n'y a aucune implication mutuelle entre les hypothèses du Corollaire 1 et celles du Corollaire 2, d'autre part, qu'il existe des opérateurs vérifiant les hypothèses plus générales du Théorème II et non celles des corollaires.

EXEMPLES. Soit f la fonction de domaine R^+ définie par:

$$\forall x > 0, f(x) = 1, f(0) = 0.$$

a) Nous notons A_1 le prolongement de f à l'espace $X = L^1(0,1)$, c'est-à-dire l'opérateur de X défini par:

$$D(A_1) = \{u \in X; u \geqq 0 \text{ p.p.}\}, \quad \text{p.p. } x \in (0,1), \quad Au(x) = f(u(x)).$$

Alors, A_1 vérifie les hypothèses du Corollaire 1. En effet, pour tout $\delta > 0$, $R(I + \delta A_1)$ est l'ensemble des fonctions de X qui sont presque partout à valeurs dans $\{0\} \cup]\delta, +\infty[$; il en résulte:

$$\forall u \in D(A_1) = \overline{D(A_1)}, \quad \frac{1}{\delta} d(u, R(I + \delta A_1)) \leqq \operatorname{mes}\{x ; 0 < u(x) < \delta\}.$$

Pourtant, A_1 ne vérifie pas les hypothèses du Corollaire 2, car si u est la fonction $x \to x^2$, $d(u, R(I + \delta A_1))$ est un infiniment petit d'ordre 3/2 lorsque δ tend vers 0.

b) Soit maintenant A_2 le prolongement de f à l'espace $l^1(R)$ des suites réelles $(u_n)_{n \geqq 0}$ telles que $\Sigma_{n \geqq 0} |u_n| < +\infty$. Alors $D(A_2) = \tilde{D}(A_2)$ est l'ensemble des suites positives dont tous les termes sont nuls, sauf un nombre fini. Pour tout $\delta > 0$, $R(I + \delta A_2)$ est l'ensemble des suites de $D(A_2)$ à valeurs dans $\{0\} \cup]\delta, +\infty[$; il en résulte que, si $u \in D(A_2)$, pour δ assez petit, $u \in R(I + \delta A_2)$. Cependant, si u est la suite $(1/2^n)$, définissant n_δ par:

$$1/2^{n_\delta} \leqq \delta/2 < 1/2^{n_\delta - 1}$$

nous avons:

$$d(u, R(I + \delta A_2)) \geqq \sum_{n \geqq n_\delta} 1/2^n = 1/2^{n_\delta - 1} \geqq \delta/2.$$

L'opérateur A_2 vérifie donc les hypothèses du Corollaire 2 (et même des hypothèses beaucoup plus fortes), mais non celles du Corollaire 1.

c) Notons enfin que le prolongement de la fonction f à $L^1(R^+)$ (soit A_3) ne vérifie pas les hypothèses des corollaires, mais vérifie par contre celles du Théorème II (et aussi celles de Takahashi [8]). Dans ce cas, en effet, $D(A_3) = \tilde{D}(A_3) = \{u \in L^1(R^+),\ \text{p.p.}x \quad u(x) \geqq 0, \quad \operatorname{mes}\{x ; 0 < u(x)\} < +\infty\}$. Pour $u \in D(A_3)$ et $\delta > 0$, u_δ défini par:

$$u_\delta(x) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqq u(x) \leqq \delta, \quad u_\delta(x) = u(x) - \delta \quad \text{si} \quad \delta < u(x),$$

vérifie:

1) $(1/\delta) | u - (u_\delta + \delta A_3 u_\delta) | \leqq \operatorname{mes}\{x ; 0 < u(x) \leqq \delta\}$
2) $| A_3 u_\delta |_i \leqq | A_3 u |_i$.

D'autre part, si u est la fonction $x \to \min(1, 1/x^2)$:

$$d(u, R(I + \delta A_3)) \geqq \int_{\sqrt{2/\delta}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \geqq \sqrt{\delta/2}.$$

Enfin, si u est la fonction définie par:

$$\forall x \in [0, 1], \quad u(x) = x^2, \quad \forall x > 1, \quad u(x) = 0,$$

d'après a), nous savons que $\lim (1/\delta^2) d(u, R(I + \delta A_3)) = +\infty$.

Nous déduisons aussi du Théorème II une caractérisation des opérateurs m-accrétifs qui généralise celles de Kobayashi et Kobayasi.

THEOREME III. *Soit A accrétif. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) $\forall \delta > 0$, $R(I + \delta A) = X$.

ii) *A est fermé et il existe une partie X' dense dans X telle que pour tout y de X', il existe un triplet (ϕ_y, a_y, b_y) vérifiant* (C) *avec $D(\phi_y) \supset \tilde{D}(A)$ et tel que $A - y$ vérifie la propriété $R(\phi_y, a_y, b_y)$.*

Démonstration du Théorème I

Elle est analogue à la démonstration du théorème de Kobayashi [5].

Etant donné $x_0 \in D(\phi) \cap \tilde{D}(A)$ et $K > \phi(x_0)$, soit $r > 0$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, tels que:

$$(\phi(x) \leqq K, \quad |x - x_0| \leqq r) \Rightarrow (a(x) \leqq a_0, \quad b(x) \leqq b_0).$$

Notant $a_0' = a_0 + 1$, nous choisissons T' tel que:

$$T'(3 + |Ax_0|_i) \leqq r \quad \text{et} \quad e^{b_0 T'}(\phi(x_0) + a_0' T') \leqq K.$$

Etant donné $\varepsilon \in]0, 1]$, nous construisons par récurrence des suites $([x_k, y_k] \in A)_{k \geqq 1}$, $(h_k)_{k \geqq 1}$, $(t_k)_{k \geqq 1}$, $(t_k = \Sigma_{1 \leqq i \leqq k} h_i)$ vérifiant:

i) $\frac{1}{2}\delta(x_{k-1}) \leqq h_k \leqq \min(\varepsilon, T' - t_{k-1})$

ii) $|x_{k-1} - x_k - h_k y_k| \leqq h_k \varepsilon$

iii) $\phi(x_k) \leqq e^{b_0 h_k}(\phi(x_{k-1}) + h_k a_0')$

iv) $|x_k - x_0| \leqq r$

v) $\phi(x_k) \leqq e^{b_0 t_k}(\phi(x_0) + t_k a_0')$

où $\delta(x_{k-1}) = \sup\{\delta; 0 \leqq \delta \leqq \min(\varepsilon, T' - t_{k-1})$, il existe $[x_\delta, y_\delta] \in A$ avec $\phi(x_\delta) \leqq e^{b_0 \delta}(\phi(x_{k-1}) + \delta a_0')$ et $|x_{k-1} - x_\delta - \delta y_\delta| \leqq \delta\varepsilon\}$.

Supposons ces suites ainsi construites jusqu'à l'ordre $k - 1$; alors, si $t_{k-1} < T'$, A vérifiant $R(\phi, a, b)$, $\delta(x_{k-1})$ est strictement positif et il existe $[x_k, y_k] \in A$ vérifiant (i), (ii), (iii). L'hypothèse (v) est aussi vérifiée car:

$$(\phi(x_{k-1}) \leqq e^{b_0 t_{k-1}}(\phi(x_0) + t_{k-1} a_0'), \quad \text{(iii)}) \Rightarrow ((\text{v})).$$

D'autre part, (iv) est assurée d'après l'inégalité démontrée par Kobayashi [5]:

$$\forall 1 \leqq k \leqq j \leqq i, \quad |x_i - x_j| \leqq (t_i - t_j)|y_k| + \varepsilon(t_i - t_k) + \varepsilon(t_j - t_k)$$

qui permet d'obtenir:

$$|x_k - x_0| \leqq (3\varepsilon + |Ax_0|_i)t_k \leqq r \qquad (\varepsilon \leqq 1).$$

En effet, nous avons en particulier:

$$\forall\, 1 \leqq k,\ |x_k - x_1| \leqq (t_k - t_1)\,|y_1| + \varepsilon(t_k - t_1).$$

D'autre part, si $[x_n, y_n] \in A$ avec x_n convergeant vers x_0 et $|y_n| \leqq |Ax_0|_i + 1/n$, nous avons d'après l'accrétivité de A:

$$|x_1 - x_n| \leqq |x_1 - x_n + h_1(y_1 - y_n)| \leqq h_1\varepsilon + h_1(|Ax_0|_i + 1/n),$$

soit à la limite:

$$|x_1 - x_0| \leqq h_1(\varepsilon + |Ax_0|_i).$$

Utilisant ces inégalités et le fait que:

$$|y_1| \leqq \frac{|x_1 - x_0|}{h_1} + \varepsilon \leqq 2\varepsilon + |Ax_0|_i$$

nous obtenons l'inégalité cherchée.

D'après le choix de T', x_k reste donc dans le domaine $\{x \in \overline{D(A)};\ \phi(x) \leqq K,\ |x - x_0| \leqq r\}$. La fonction ϕ étant s.c.i., il en résulte que $x_\infty = \lim_{k\to+\infty} x_k$, qui existe d'après l'inégalité de Kobayashi rappelée ci-dessus, vérifie:

$$\phi(x_\infty) \leqq K \quad \text{et} \quad |x_\infty - x_0| \leqq r.$$

Supposons que $\lim_{k\to\infty} t_k = T_0 < T'$; appliquant alors la propriété $R(\phi, a, b)$ à x_∞, nous obtenons l'existence de $\delta \in\,]0, \min(\varepsilon, T - T_0)[$, et $[x_\delta, y_\delta] \in A$ tels que:

$$|x - x_\delta - \delta y_\delta| \leqq \delta\frac{\varepsilon}{2}, \quad \phi(x_\delta) \leqq e^{b_0\delta}(\phi(x_\infty) + a_0\delta).$$

D'autre part, utilisant que ϕ est s.c.i., il existe un indice i_0 tel que:

$$|x_\infty - x_{i_0}| \leqq \delta\frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta(x_{i_0}) < \delta, \quad \phi(x_\infty) - \delta < \phi(x_{i_0}),$$

soit encore:

$$0 < \delta(x_{i_0}) < \delta < \min(\varepsilon, T - t_{i_0}), \quad |x_{i_0} - x_\delta - \delta y_\delta| \leqq \delta\varepsilon,$$

$$\phi(x_\delta) \leqq e^{b_0\delta}(\phi(x_{i_0}) + a_0'\delta).$$

Ceci contredit la maximalité de $\delta(x_{i_0})$; nous en déduisons que $\lim_{k\to\infty} t_k = T'$ et que tout $t \in\,]0, T'[$ convient.

REMARQUES. Si a et b sont localement bornées, T' (et donc T) peut être choisi indépendamment de $\phi(x_0)$.

Si a et b sont bornées, T' peut être choisi quelconque. Dans ce cas, le résultat est donc vrai pour tout $T > 0$ et tout $x_0 \in D(\phi) \cap \overline{D(A)}$.

Démonstration du Théorème II

D'après le Théorème I, pour x_0 dans $\tilde{D}(A) \cap D(\phi) = \tilde{D}(A)$, il existe $T > 0$ avec pour tout $\varepsilon > 0$ des solutions ε-approchées du problème (P) sur [0, T]. D'après le théorème de Kobayashi [5] (cf. aussi [4]), ces solutions convergent uniformément vers u continu de $[0, T]$ à valeurs dans $D(\phi)$ puisque ϕ est s.c.i. D'après le théorème de Bénilan [1], u est bonne solution du problème (P).

Pour montrer que cette solution se prolonge sur $[0, +\infty[$, il suffit de manière classique, de montrer que si u est bonne solution sur $[0, T_0[$ de $(du/dt) + Au \ni 0$ avec $u(0) = u_0$ dans $\tilde{D}(A)$, $u = \lim u(t)$ quand t tend vers T_0^- existe et appartient à $\tilde{D}(A)$. Montrons qu'en fait $t \mapsto |Au(t)|_i$ est décroissante. Pour cela rappelons quelques définitions (cf. Bénilan [2]):

$\hat{D}(A) = \{x \in \overline{D(A)}; \exists\, \psi$ semi-norme continue sur $X \times R$ prolongeant la norme de X et telle que:

$$\forall \delta > 0, \quad \forall [\xi, \eta] \in A, \quad |x - \xi| \leqq \psi(x - \xi - \delta\eta, \delta)\}.$$

Pour $x \in \hat{D}(A)$, $\|Ax\| = \inf\{\psi(0,1);\ \psi$ vérifiant la propriété ci-dessus$\}$.

La proposition suivante précise les relations entre $\tilde{D}(A)$ et $\hat{D}(A)$.

PROPOSITION.

a) $\tilde{D}(A) \subset \hat{D}(A)$ *et* $\|Ax\| \leqq |Ax|_i$

b) $(x \in \hat{D}(A), \liminf_{\delta \to 0^+} (1/\delta) d(x, R(I + \delta A)) = 0) \Rightarrow (x \in \tilde{D}(A),\quad \|Ax\| = |Ax|_i)$.

Cette proposition montre que, sous les hypothèses du Théorème II, $D(\phi) \cap \hat{D}(A) = D(\phi) \cap \tilde{D}(A) = \tilde{D}(A)$ et que les fonctions $\|A\cdot\|$ et $|A\cdot|_i$ coincident sur cet ensemble. D'après les propriétés des bonnes solutions, la fonction $t \mapsto |Au(t)|_i$ est décroissante et le Théorème II est démontré.

Démonstration de la proposition

D'après [2], nous savons que:

$$D(A) \subset \hat{D}(A) \quad \text{et} \quad \forall x \in D(A), \quad |Ax| \leqq \|Ax\|.$$

Etant donné $x \in \tilde{D}(A)$, considérons une suite $[x_n, y_n] \in A$ avec x_n convergeant vers x et $|y_n| \leqq |Ax|_i + 1/n$; nous avons donc:

$$\forall n, \|Ax_n\| \leqq |Ax_n| \leqq |Ax|_i + 1/n,$$

soit à la limite:

$$\|Ax\| \leqq |Ax|_i.$$

Soit maintenant $x \in \hat{D}(A)$ et ψ semi-norme sur $X \times R$ telle que:

$$\forall [\xi, \eta] \in A, \quad |x - \xi| \leqq \psi(x - \xi - \delta\eta, \delta).$$

Soit $(\varepsilon_n)_{n \geqq 0}$ et $(\delta_n)_{n \geqq 0}$ des suites de nombres positifs convergeant vers 0 et $[x_n, y_n] \in A$ avec:

$$|x - x_n - \delta_n y_n| \leqq \delta_n \varepsilon_n.$$

Nous obtenons:

$$|y_n| \leqq \varepsilon_n + \frac{|x - x_n|}{\delta_n} \leqq \psi\left(\frac{x - x_n}{\delta_n} - y_n, 1\right) + \varepsilon_n.$$

$$\limsup_{n \to \infty} |y_n| \leqq \psi(0, 1).$$

Nous en déduisons $x \in \tilde{D}(A)$ et $|Ax|_i \leqq \|Ax\|$.

Démonstration du Théorème III

Utilisant le Théorème II, il est classique de démontrer l'existence sur $[0, +\infty[$ d'une bonne solution du problème $(du/dt) + Au \ni f$, $u(0) = x_0 \in \tilde{D}(A)$ avec $f(t) = y - u(t)$ et $y \in X$ (cf. par exemple Bénilan [1], pp. 1–24); $\lim_{t \to +\infty} u(t) = u_\infty$ existe et appartient à $\tilde{D}(A)$. D'après la fermeture de A et le fait que $\liminf_{\delta \to 0^+} (1/\delta) d(u_\infty + \delta y, R(I + \delta(A + I))) = 0$, nous démontrons que $y \in u + Au$. L'implication ii) $\Rightarrow$ i) en résulte.

Un exemple d'application des Théorèmes I et II

Pour montrer l'intérêt des Théorèmes I et II, outre le fait qu'ils généralisent des résultats connus, nous avons cru bon de montrer qu'ils s'appliquaient directement à l'étude du problème suivant de T. Carleman:

$$u'_t + u'_x + u^2 - v^2 = 0$$

$$v'_t - v'_x + v^2 - u^2 = 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x)$$

où u et v sont des fonctions de $Rx[0, +\infty[$ dans R^+.

Ce problème a déjà été étudié par Kolodner [7]. Notons aussi que l'introduction de pseudo-générateurs dans l'étude de ce type de problème n'est pas nouvelle; elle a été utilisée en particulier par Crandall [3] pour résoudre des problème de T. Carleman plus élaborés que celui présenté ici. Le résultat énoncé ici n'est donc pas nouveau, mais la méthode utilisée est distincte et a pour but de montrer que les Théorémes I et II peuvent s'appliquer avec des fonctions "ϕ" autres que $|A\cdot|_i$ (ou que la fonction nulle).

Nous choisissons comme cadre l'espace $X = L^1(R)\times L^1(R)$, muni de la norme:

$$|(u,v)| = \|u\|_{L^1(R)} + \|v\|_{L^1(R)}.$$

Nous définissons le cône $C = \{(u,v)\in X; u \geqq 0, v \geqq 0\}$, l'opérateur A de domaine $D(A) = \{(u,v)\in C; (u', -v')\in X\}$ avec $A(u,v) = (u', -v')$ et l'opérateur B de domaine $D(B) = \{(u,v)\in C; (u^2 - v^2)\in L^1(R)\}$ avec $B(u,v) = (u^2 - v^2, v^2 - u^2)$.

Proposition.

1) *$A + B$ est accrétif dans X.*

2) *Pour tout (u_0, v_0) dans C, il existe une bonne solution sur $[0, +\infty[$ du problème:*

$$\frac{d}{dt}(u,v) + (A+B)(u,v) = 0, \qquad (u,v)(0) = (u_0, v_0).$$

Demonstration. L'accrétivité de $A + B$ se démontre aisément en utilisant que u et v sont à valeurs positives. (Cf. [3].)

Pour le second point, nous montrons que $A + B$ vérifie les hypothèses du Théorème II. Pour cela nous introduisons la fonction s.c.i. ϕ définie par:

$$\phi(u,v) = \|u\|_{L^\infty(R)} + \|v\|_{L^\infty(R)} \quad \text{si} \quad (u,v)\in C\cap(L^\infty(R))^2$$

$$\phi(u,v) = \infty \quad \text{sinon}.$$

Pour tout $\delta > 0$:

$$R(I+\delta A)\supset C \quad \text{et} \quad \forall (u,v)\in C,\ \phi((I+\delta A)^{-1}(u,v)) \leqq \phi(u,v).$$

Pour (u,v) dans $D(\phi)$ et δ assez petit, $(u,v) - \delta B(u,v)$ appartient à C. Nous pouvons donc définir $(u_\delta, v_\delta) = (I+\delta A)^{-1}((u,v) - \delta B(u,v))$ qui converge dans X vers (u,v) lorsque δ tend vers 0. De plus:

$$\phi(u_\delta, v_\delta) \leqq \phi(u,v) + \delta\phi(B(u,v)) \leqq \phi(u,v) + 2\|u^2 - v^2\|_{L^\infty(R)}.$$

L'opérateur B étant continu sur les bornés de ϕ, nous avons aussi:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} |(u, v) - (I + \delta(A + B))(u_\delta, v_\delta)| = \lim_{\delta\to 0^+} |B(u, v) - B(u_\delta, v_\delta)| = 0.$$

Ceci démontre que $A + B$ vérifie la propriété $R(\phi, a, 0)$ avec pour (u, v) dans X: $a(u, v) = 2\|u^2 - v^2\|_{L^\infty(R)}$.

D'autre part, pour démontrer que $\tilde{D}(A + B) \subset D(\phi)$, considérons une suite (u_n, v_n) de $D(A)$ telle que:

1) $(u_n, v_n) \to (u, v)$ dans X

2) $\|u_n' + u_n^2 - v_n^2\|_{L^1(R)} + \| - v_n' + v_n^2 - u_n^2\|_{L^1(R)}$ borné.

Par somme et différence, nous obtenons que $u_n' - v_n'$ et $u_n' + v_n' + 2(u_n^2 - v_n^2)$ restent bornés dans $L^1(R)$, soit $u_n - v_n$ borné dans $L^\infty(R)$; u_n et v_n convergeant d'autre part dans $L^1(R)$, $u_n^2 - v_n^2$ reste borné dans L^1, ainsi donc que $u_n' + v_n'$. Il en résulte que u_n et v_n restent bornés dans $L^\infty(R)$.

L'opérateur $A + B$ vérifie donc les hypothèses du Théorème II.

REMARQUE. M. Crandall m'a informé que R. H. Martin lui avait déjà indiqué la démonstration de ce dernier point (non publié), qui permet de montrer en outre que $A + B$ est fermé.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ph. Benilan, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, thèse, Orsay (1972).

2. Ph. Benilan, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque* (à paraître).

3. M. G. Crandall, *Semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces*, in *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, 1971, pp. 169–172.

4. M. G. Crandall and L. C. Evans, *On the relation of the operator $(\partial/\partial\tau)+(\partial/\partial s)$ to evolution equations governed by accretive operators*, Israel J. Math. **21** (1975), 261–278.

5. Y. Kobayashi, *Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups* (to appear in J. Math. Soc. Japan).

6. Y. Kobayashi and K. Kobayasi, *Criteria for m-dissipativity of a nonlinear operator in Banach spaces* (to appear).

7. I. Kolodner, *On the Carleman model for the Boltzmann equation and its generalizations* in *Nonlinear Problems*, The University of Wisconsin Press, 1963.

8. T. Takahashi, *Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of semigroups of nonlinear contractions* (to appear).

28, RUE J. LE VAILLANT
56600—LANESTER, FRANCE